Литература

1. Скворцов А.В., Мирза Н.С. *Алгоритмы построения и анализа триангуляции.* – Томск: Изд. Томск. ун-та, 2006. – 168 с.

2. Клячин В.А. *Алгоритм триангуляции, основанный на условии пустого выпуклого множества* // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2015. – Т. 28, № 3. – С. 27–33.

3. Клячин В.А. *Экстремальные свойства триангуляции, основанной на условии пустого выпуклого множества* // Сибирские электронные математические известия. – 2015. – Т. 12. – С. 991–997.

4. Гельфанд И.М., Зелевинский А.В., Капранов М.М. *Дискриминанты многочленов от многих переменных и триангуляции многогранников Ньютона* // Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2, Вып. 3. – С. 1–62.

5. Каменев Г.К., Поспелов А.И. *Полиэдральная аппроксимация выпуклых компактных тел методами наполнения* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 5. – С. 818–828.

6. Бронштейн Е.М. *Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками* // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т. 22. – С. 5–37.

APPROXIMATION OF GRADIENT OF THE CONVEX FUNCTIONS
BASED ON Φ-TRIANGULATION

E.G. Grigorieva, V.A. Klyachin

The class of Φ-triangulations of a finite set of P points in $\mathbb{R}^n$ similar to classical Delaunay triangulation is introduced. Such triangulations are constructed using the condition of empty intersection with the set P of the interior of every convex set from a given family of convex, bounded sets whose boundary contains vertices of the simplex of the triangulation. In this case, the classical Delaunay triangulation corresponds to the family of all balls in $\mathbb{R}^n$. We use of Φ-triangulations to obtain estimates of the error of approximation of the derivatives of C^2-smooth convex functions by piecewise linear functions.

Keywords: Delaunay triangulation, empty sphere condition, convex set families, piecewise approximation.

УДК 512.573, 512.562

$\boldsymbol{\pi_1(K)}$–ГРАДУИРОВАННЫЕ $\boldsymbol{C^*}$–АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ЧАСТИЧНО–УПОРЯДОЧЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ

С.А. Григорян[1], Е.В. Липачева[2], А.С. Ситдиков[3]

1 *gsuren@inbox.ru*; Казанский государственный энергетический университет
2 *elipacheva@gmail.com*; Казанский государственный энергетический университет
3 *airat_vm@rambler.ru*; Казанский государственный энергетический университет

В работе строится C^*–алгебра над частично–упорядоченным множеством, в каждой точке которого задано гильбертово пространство. Доказывается, что эта алгебра является градуированной по 1-й гомотопической фундаментальной группе данного частично-упорядоченного множества.

Ключевые слова: C^*–алгебра, градуированная C^*–алгебра, полугруппа путей, частично-упорядоченное множество, 1-я гомотопическая фундаментальная группа, оператор частичной изометрии.

Работа посвящена исследованию C^*–алгебр, заданных на тройке $(K, H_a, \gamma_{ba})_{a\le b\in K}$, где K — частично–упорядоченное множество, H_a — гильбертовы пространства (пространства состояний), а $\gamma_{ba} : H_a \to H_b$ — изометрические вложения. Данная задача возникает при алгебраическом подходе к квантовой теории поля, основы которого были разработаны в [1, 2]. В работах [3–5] Допличером и Робертсом была установлена связь между полевым описанием физической системы и описанием, основанном на алгебре наблюдаемых. В настоящей работе используется аксиоматический подход к описанию полугруппы путей, который отличается от подхода Допличера и Робертса. Основным объектом исследования в нашем случае является пространство состояний, с помощью которого мы исследуем алгебру наблюдаемых над частично-упорядоченным множеством. Работа является продолжением исследований, начатых в работе [6].

Пусть K — частично–упорядоченное множество с отношением порядка $\le$, удовлетворяющим свойствам рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. Элементы a and b называются *сравнимыми* на K, если $a \le b$ или $b \le a$. Назовем множество K *направленным вверх*, если для любых $a, b \in K$ существует $c \in K$, такой, что $a \le c$ и $b \le c$.

Пусть задана тройка $(K, H_a, \gamma_{ba})_{a\le b\in K}$, где H_a — гильбертовы пространства с базисом $\{e^a_n\}^\infty_{n=1}$, а $\gamma_{ba} : H_a \to H_b$ — изометрические вложения, заданные для $a \le b$, отображающие базис $\{e^a_n\}^\infty_{n=1}$ в базис $\{e^b_n\}^\infty_{n=1}$ и удовлетворяющие соотношению $\gamma_{ca} = \gamma_{cb} \circ \gamma_{ba}$, если только $a \le b \le c$.

Приведем определение пути на K. Подробное описание можно посмотреть в [6]. Назовем упорядоченную пару (b, a) для $b \le a$ или $\overline{(b, a)}$ для $b \ge a$ на K *элементарным путем*. При этом $\partial_1 p = a$ называется *начальной точкой* пути и $\partial_0 p = b$ — *конечной точкой*. Определим *обратный путь* $p^{-1} = \overline{(a, b)}$ для $p = (b, a)$ и $p^{-1} = (a, b)$ для $p = \overline{(b, a)}$. Пару $(a, a) = \overline{(a, a)} = i_a$ назовем *тривиальным путем*. Символом 0 обозначим *нулевой путь*, не имеющий начальной и конечной точек.

Пусть $p_1, \dots, p_n$ — элементарные пути, такие, что $\partial_0 p_{i-1} = \partial_1 p_i$ для $i = 2, \dots, n$. Определим *путь* p как последовательность

$$p = p_n * p_{n-1} * \dots * p_1.$$

При этом $\partial_1 p = \partial_1 p_1$ — начальная точка пути p и $\partial_0 p = \partial_0 p_n$ — конечная точка. Обратный путь определяется как

$$p^{-1} = p_1^{-1} * p_2^{-1} * \dots * p_n^{-1}.$$

Определим произведение путей, продолжив операцию " $*$ " для любых p и q:

$$p * q = \begin{cases} p * q & \text{если } p \ne 0,\ q \ne 0 \text{ и } \partial_1 p = \partial_0 q, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Полугруппой путей S называется множество всех путей на K с бинарной операцией " $*$ ", удовлетворяющей аксиомам для любых $a, b, c \in K$, таких, что $a \le b \le c$,

1. $(a, b) * (b, c) = (a, c)$;
2. $\overline{(c, b)} * \overline{(b, a)} = \overline{(c, a)}$;
3. $\overline{(b, a)} * (a, b) = i_b$, $\quad (a, b) * \overline{(b, a)} = i_a$;
4. $(a, b) * i_b = (a, b)$, $\quad i_a * (a, b) = (a, b)$;

5. $\overline{(b,a)} * i_a = \overline{(b,a)}, \quad i_b * \overline{(b,a)} = \overline{(b,a)}$;
6. $i_a * i_a = i_a$.

Назовем $p \in S$ *петлей*, если $\partial_0 p = \partial_1 p$. Обозначим через G_a, $a \in K$ множество всех петель, имеющих начальную и конечную точку a. В работе [6] показано, что G_a является подгруппой в S с единицей i_a и описаны свойства этой группы и полугруппы S. Отметим, что если K — направленное вверх множество, то G_a — тривиальна.

Множество K называется *связным*, если для любых $a, b \in K$ существует путь p, такой, что $\partial_0 p = a$, $\partial_1 p = b$. Далее в статье будем считать, что множество K связное. В работе [6] было показано, что для связного множества K справедливо $G_a \cong G_b$ для любых $a, b \in K$.

Пусть $\pi_1(K)$ — 1-я (гомотопическая) фундаментальная группа частично-упорядоченного множества K (см. работы [3–5]).

Теорема 1. *Имеет место изоморфизм $\pi_1(K) \cong G_a$ для любого $a \in K$.*

Для любого $a \in K$ определим $S_a = \{p \in S \mid \partial_0 p = a\}$.

Рассмотрим гильбертово пространство

$$l^2(S_a) = \left\{ f : S_a \to \mathbb{C} \mid \sum_{p \in S_a} |f(p)|^2 < \infty \right\}$$

со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \sum_{p \in S_a} f(p)\overline{g(p)}$. Семейство функций $\{e_p\}_{p \in S_a}$ образует ортонормированный базис в $l^2(S_a)$, где $e_p(p') = \delta_{p,p'}$ — символ Кронекера.

Пусть $\mathscr{H} = \bigoplus_{a \in K} H_a \otimes l^2(S_a)$. Для любых $a, b \in K$, $a \le b$, определим оператор частичной изометрии $\chi_a^b : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ следующим образом:

$$\chi_a^b(h \otimes e_p) = \begin{cases} \gamma_{ba}(h) \otimes e_{\overline{(b,a)} * p} & \text{если } h \in H_a \text{ и } \partial_0 p = a, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что $\chi_a^b(H_a \otimes l^2(S_a)) \subseteq H_b \otimes l^2(S_b)$. Сопряженным оператором к χ_a^b является оператор $\chi_a^{b*} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, действующий следующим образом:

$$\chi_a^{b*}(h \otimes e_p) = \begin{cases} h' \otimes e_{(a,b) * p} & \text{если существует } h' \in H_a \text{, такой,} \\ & \text{что } h = \gamma_{ba}(h') \text{ и } \partial_0 p = b, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*
1) $\chi_a^c = \chi_b^c \chi_a^b$, *если* $a \le b \le c$.
2) $\chi_a^{c*} = \chi_a^{b*} \chi_b^{c*}$, *если* $a \le b \le c$.
3) $\chi_a^{b*} \chi_a^b = I_{H_a} \otimes I_a$, *где* $I_{H_a} \otimes I_a : \mathscr{H} \to H_a \otimes l^2(S_a)$ *— проектор.*
4) $\chi_a^b \chi_a^{b*} = P_{H_b} \otimes I_b$, *где* $P_{H_b} \otimes I_b : \mathscr{H} \hookrightarrow H_b \otimes l^2(S_b)$ *— проектор.*

Лемма 2. *Для любых сравнимых $b, d \in K$ если $a, c \le b$ и $a, c \le d$, то $\chi_c^{b*} \chi_a^b = \chi_c^{d*} \chi_a^d$.*

Множество изометрий $\{\chi_a^b\}_{a,b \in K, a \le b}$ может быть расширено до $\{\chi_p\}_{p \in S}$ следующим образом. Если

$$p = (a_{2n}, a_{2n-1}) * \ldots * \overline{(a_3, a_2)} * (a_2, a_1) * \overline{(a_1, a_0)}$$

— произвольный путь, то
$$\chi_p = \chi_{a_{2n}}^{a_{2n-1}*} \dots \chi_{a_2}^{a_1*} \chi_{a_0}^{a_1}.$$

При этом $\chi_p^* = \chi_{p^{-1}}$.

Назовем *областью определения* пути p множество
$$D_p = \{h \in H_{\partial_1 p} \mid \chi_p(h \otimes e_q) \neq 0 \text{ если } \partial_0 q = \partial_1 p\}.$$

Заметим, что для равных путей $p = q \in S$ необязательно должно выполняться $D_p = D_q$. Например, если $p = i_a = (a,b) * \overline{(b,a)}$ для $a \leq b$, то $D_p = H_a$, а если $p = i_a = \overline{(a,c)} * (c,a)$ для $c \leq a$, то $D_p \subseteq H_a$.

Теорема 2. *Пусть* $p = q \in G_a$. *Тогда* $\chi_p^* \chi_q = P_{H_a} \otimes I_a$.

Следствие 1. *Для любой петли* $p \in G_a$ *справедливо* $\chi_p^* \chi_p = P_{H_a} \otimes I_a$. *Причем здесь* P_{H_a} *— есть проектор на область определения* $D_{p^{-1} * p}$.

Следствие 2. *Если* K *— направленное вверх множество, то для любой петли* $p \in G_a$ *справедливо* $\chi_p = P_{H_a} \otimes I_a$. *Здесь* P_{H_a} *— есть проектор на область определения* D_p.

Будем называть отображение χ_p *циклом*, если p есть петля.

Любой цикл χ_p, $p \in G_a$, имеет вид $\chi_p = U_p \otimes L_p$, где $U_p : H_a \to H_a$ — оператор частичной изометрии, а $L_p : l^2(S_a) \to l^2(S_a)$ — оператор, соответствующий петле p, такой, что $L_p e_q = e_{p*q}$.

Пусть $p = q \in G_a$. Тогда $L_p = L_q$, но, вообще говоря, $U_p \neq U_q$. Из следствия 3 имеем: $\chi_p^* \chi_p = P_{H_a} \otimes I_a$. Будем обозначать этот проектор P_{H_a} через Q_p. Таким образом, $\chi_p^* \chi_p = Q_p \otimes I_a$ и $\chi_q^* \chi_q = Q_q \otimes I_a$.

Для $p = q$ определим отношение порядка на циклах: $\chi_p \leq \chi_q$, если $Q_p \leq Q_q$. Нетрудно видеть, что справедливы неравенства
$$\chi_p^* \chi_q \leq \chi_q^* \chi_q; \quad \chi_p^* \chi_q \leq \chi_p^* \chi_p. \tag{1}$$

Определим для $p = q$ операцию сложения циклов $\chi_p \vee \chi_q$ следующим образом:

1) если $Q_p + Q_q$ — снова проектор, т.е. $Q_p Q_q = 0$, то $\chi_p \vee \chi_q = \chi_p + \chi_q$;

2) если $Q_p Q_q = Q \neq 0$, то $\chi_p \vee \chi_q = \chi_p + \chi_q((Q_q \setminus Q) \otimes I_a)$.

Тогда сумма операторов $\chi_p \vee \chi_q$ также представляется в виде $\chi_p \vee \chi_q = U_{p,q} \otimes L_p = U_{p,q} \otimes L_q$.

Определим оператор
$$\hat{\chi}_p = \bigvee_{p_i = p} \chi_{p_i}.$$

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Если $p = q$, *то* $\hat{\chi}_p = \hat{\chi}_q$.

2) $\hat{\chi}_p \hat{\chi}_q = \hat{\chi}_{p*q}$.

Пусть $\mathfrak{A}_{a,e}$ — подалгебра в $B(H_a \otimes l^2(S_a))$, замкнутая в сильно-операторной топологии, порожденная циклами $\chi_p = P_{H_a} \otimes I_a$. Отметим, что эта алгебра будет содержать, в частности, операторы вида $\hat{\chi}_p^* \hat{\chi}_p$.

Рассмотрим семейство банаховых пространств $\mathfrak{A}_{a,p} = \mathfrak{A}_{a,e} \hat{\chi}_p$, $p \in G_a$. Они замкнуты и $\mathfrak{A}_{a,e}$ соответствует единице i_a группы G_a.

Пусть $\mathfrak{A}_a$ — замкнутая в равномерной норме подалгебра в $B(H_a \otimes l^2(S_a))$, порожденная элементами из семейства $\mathfrak{A}_{a,p}$, $p \in G_a$.

Теорема 3. *C^*–алгебра $\mathfrak{A}_a$ является $\pi_1(K)$–градуированной C^*–алгеброй*

$$\mathfrak{A}_a = \overline{\bigoplus_{p \in G_a \cong \pi_1(K)} \mathfrak{A}_{a,p}}.$$

Литература

1. Haag R., Kastler D. *An algebraic approach to quantum field theory* // Journal of mathematical physics. – 1964. – V. 5. – P. 848–861.

2. Haag R. *Local quantum physics: fields, particles, algebras.* – Springer–Verlag, Berlin, 1992.

3. Doplicher S., Roberts J.E. *Why there is field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics* // Comm. Math. Phys. – 1990. – V. 131. – P. 51–107.

4. Doplicher S., Roberts J.E. *A new duality theory for compact groups* // Invent. math. – 1989. – V. 98. – P. 157–218.

5. Doplicher S., Roberts J.E. *Endomorphisms of C*-algebras, cross products and duality for compact groups* // Annals of Mathematics. – 1989. – V. 130. – P. 75–119.

6. Grigoryan S., Grigoryan T., Lipacheva E., and Sitdikov A. *C*-algebra generated by the paths semigroup* // Lobachevskii J. Math. – 2016. – V. 37. – № 6. – P. 740–748.

$\pi_1(K)$–GRADED C^*–ALGEBRAS GENERATED BY PARTIALLY ORDERED SET

S.A. Grigoryan, E.V. Lipacheva, A.S. Sitdikov

In this paper we construct the C^*-algebra over a partially ordered set, at each point of which there is given a Hilbert space. It is proved this algebra is graded by the 1st homotopy fundamental group of the partially ordered set.

Keywords: C^*–algebra, graded C^*–algebra, path semigroup, partially ordered set, 1st homotopy fundamental group, operator of partial isometry.

УДК 517.54

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ЕДИНСТВЕННОСТИ КОРНЯ УРАВНЕНИЯ ГАХОВА

С.А. Губайдуллина[1], А.В. Казанцев[2]

1 *sumbel.gubaydullina@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

2 *avkazantsev63@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье обсуждается новое условие единственности корня уравнения Гахова.

Ключевые слова: уравнение Гахова, класс Гахова.

Следующее утверждение устанавливается в рамках подхода, использованного в работах [1], [2]. Пусть $\tilde{H}_0$ – класс всех голоморфных и локально однолистных функций $f(\zeta) = \zeta + \ldots$ в круге $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, $\tilde{\mathscr{G}}_1$ – регулярный класс Гахова, состоящий